TD numéro 8

Exercice 1. On considère X et Y des $S-$schémas.

1. Montrer que $X \times_S S \simeq X$ et que $X \times_S Y \simeq Y \times_S X$.
2. Si Z est un $S-$schéma, montrer que $(X \times_S Y) \times_S Z \simeq X \times_S (Y \times_S Z)$.
3. Si Z est un $Y-$schéma, montrer que $(X \times_S Y) \times_Y Z \simeq X \times_S Z$.

Exercice 2. Soit A un anneau. On considère le schéma affine $X = \mathrm{Spec}(A)$. Nous nous proposons ici de montrer que X est un schéma noethérien si et seulement si A est noethérien.

On suppose que X est recouvert par des ouverts affines $\mathrm{Spec}(A_i)$ avec chaque A_i noethérien.

1. Montrer que, quitte à raffiner le recouvrement, on peut supposer que les A_i sont de la forme A_{f_i}, avec $f_i \in A$ (X étant quasi-compact, on peut alors supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'indices i).
2. Soit $\varphi_i : A \to A_{f_i}$ le morphisme de localisation. Montrer que, pour tout idéal I de A, on a $I = \bigcap_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I)A_{f_i})$.
3. Conclure.

Exercice 3. Soit X un schéma noethérien.

1. Montrer que tout sous-schéma ouvert ou fermé de X est noethérien.
2. Pour tout point $x \in X$, montrer que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien.
3. Montrer que pour tout ouvert affine U de X, $\mathcal{O}_X(U)$ est noethérien.

Exercice 4. Montrer qu'un schéma X est réduit si et seulement si pour tout ouvert U de X, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit.

Exercice 5. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$.

1. Montrer qu'un fermé $Y = V(I)$ de X est irréductible si et seulement si le radical de I est premier.
2. Montrer que X est intègre si et seulement si A est intègre.
3. Si l'on suppose A noethérien, montrer que les composantes irréductibles de X sont les $V(\mathfrak{p}_i)$ avec $\mathfrak{p}_i$ idéal premier de A.